www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTÈRE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DE LA MER

E.I.T.P.E. 1990

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Avertissement : La clarté et la concision des raisonnements seront des éléments importants d'appréciation.

Etant donné un ensemble E et une application f de E dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on dira que n éléments rangés de E notés $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forment un cycle pour f si $a_2, \ldots a_n$ sont distincts de a_1 et si $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{n-1}) = a_n$ et $f(a_n) = a_1$.

On pourra noter $f^h(a_1) = a_{1+h}$ pour $h \in \mathbb{N}$ et $a_{n+1} = a_1$.

Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme de E sera dit cyclique d'ordre n s'il existe au moins une famille de n vecteurs, engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment un cycle pour f. On appellera alors un tel cycle : f - cycle générateur.

PREMIERE PARTIE

On suppose que E est un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E cyclique d'ordre n.

1) Montrer que dans un f - cycle générateur

a) deux vecteurs quelconques sont distincts

b) deux vecteurs consécutifs forment une base de E

c) $f^n = Id_E$ (endomorphisme identique de E)

d) $\forall m \in \mathbb{N}, 0 < m < n \Rightarrow f^m \neq Id_E$

2) Montrer que si V est un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre pour f, alors $(V, f(V), \ldots, f^{n-1}(V))$ est un f - cycle générateur.

3) a) f peut-il être une homothétie ?

b) Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f est représenté par une matrice M de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Que valent la trace de f (notée : tr f) et le déterminant de f (noté : dét f) ?

c) Etablir que $a \in \{-1,1\}$, que a et b sont indépendants du choix d'une telle base et que : $f^2 = a\, Id_E + bf$.

T.S.V.P.

d) Soit P le polynôme : $P(X) = X^2 - bX - a$. Démontrer que P divise dans l'anneau des polynômes réels le polynôme $X^n - 1$ et qu'il n'a pas de racine double.

e) Caractériser géométriquement f quand P a deux racines réelles.

4) On suppose désormais, et pour toute la fin de cette première partie, que les racines de P ne sont pas réelles.

a) Préciser la valeur de a et montrer que b appartient à $]-2,2[$.

On posera désormais $\theta = \text{Arccos}\,\frac{b}{2}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer f^k comme combinaison linéaire de f et de Id_E (on en donnera les coefficients à l'aide de k et θ).

5) Soit $(V_1, V_2, \ldots V_n)$ un f - cycle générateur. Montrer qu'il existe une et une seule forme bilinéaire symétrique φ sur E vérifiant les deux conditions : i) $\varphi(V_1,V_1) = 1$

ii) $\forall (X,Y) \in E^2$, $\varphi(f(X),f(Y)) = \varphi(X,Y)$

Préciser la valeur de $\varphi(V_1,V_2)$ à l'aide de θ.

6) a) Montrer que φ définit alors un produit scalaire sur E.

b) Montrer que f est une rotation de l'espace euclidien (E,φ) et qu'il existe une orientation de E pour laquelle θ est une mesure de l'angle de la rotation f.

c) Pour $(k,\ell) \in \{1,2, \ldots, n\}^2$, calculer $\varphi(V_k,V_\ell)$ en fonction de θ, k,ℓ.

DEUXIEME PARTIE

On suppose que E est un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E cyclique d'ordre n. (n entier, $n \geq 3$).

1) a) Etablir la relation : $f^n = Id_E$.

b) Montrer que Id_E, f, f^2, sont linéairement indépendants dans l'espace des endomorphismes de E, et qu'il existe au moins une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

c) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - cX^2 - bX - a$ divise le polynôme $X^n - 1$, dans l'anneau des polynômes réels.

d) Quel est le polynôme Q, de plus bas degré, à coefficients réels, tel que $Q(f) = 0$ et dont le coefficient du terme de degré maximum est égal à 1.

e) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

f) Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1} en fonction de a, b, c, I, f, f^2.

2) a) Montrer que f admet une unique valeur propre réelle, et que celle-ci est non multiple .

b) Quelle est cette valeur propre lorsque dét f > 0.

Calculer a, b, c connaissant un argument θ d'une des valeurs propres non réelles de f.

c) Reprendre la question 2b) lorsque détf < 0.
Y-a-t-il dans ce cas une condition sur l'entier n ?

3) a) Démontrer qu'il existe un unique plan de E qui soit stable par f, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension deux, E_1, tel que $f(E_1) \subset E_1$.

b) On suppose dét f > 0, et on note : $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ un f - cycle générateur. Démontrer que les vecteurs $V_2 - V_1$, $V_3 - V_2$, ..., $V_1 - V_n$ sont tous dans E_1 et forment un cycle pour f.

*** FIN ***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail